Formas Cuadráticas y el teorema de los 15

Juanita Duque
Universidad de los Andes, Colombia
j.duque10@uniandes.edu.co

Una forma cuadrática entera es un polinomio $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[x]$, homogéneo y de grado 2. Diremos que $f(x_1, \ldots, x_n)$ representa a un entero m si existe $\vec{a} \in \mathbb{Z}^n$ tal que $f(\vec{a}) = m$. Nuestro objetivo será explicar con detalle una demostración del *"teorema de los 15" de Conway-Schneeberger* (1993). Explicaremos los detalles de la prueba publicada por Bhargava (2000). El teorema afirma: *si una forma cuadrática entera definida positiva representa a todo entero positivo hasta 15, entonces representa a todos los enteros positivos.* Una forma que cumpla esto último se denomina *universal*.

A partir de este punto, el término forma cuadrática se referirá a una forma cuadrática definida positiva. Para demostrar el teorema se utilizará la relación que existe entre retículos y formas cuadráticas. Denote como *ausente* al mínimo entero que una forma cuadrática no universal no representa. Una *escalada* de un retículo no universal L es el retículo generado por L y un vector de norma el ausente de L. Un *retículo escalado* es una sucesión de escaladas partiendo del retículo cero dimensional. Se mostrará que todo retículo escalado de dimensión cinco es universal, hallando directamente todos los retículos escalados de dimensión menor o igual a 5. Después, se probará que toda forma cuadrática es universal si y solo si posee un subretículo escalado cuatro o cinco dimensional universal. Luego, toda forma cuadrática es universal si representa a los ausentes de los retículos escalados de dimensión 0 hasta 4. El nombre del teorema se debe a que estos ausentes son menores o iguales que 15.

Joint work with Yacir Ramirez (Universidad de los Andes, Colombia).